

平成23年度 入試問題の解答と解説（数学）

平成23年2月10日に行われた入学試験の問題のうち、問5について解答と解説を行います。

問5 6人の子どもが3人ずつ2チームに分かれて、次のようなルールでゲームを行った。

- ()それぞれのチームで、相手チームから誰が欲しいかを相談し、その1名を指名する。
- ()指名された2名がじゃんけんをする。
- ()負けた子は、勝ったチームに移動する。
- ()どちらかのチームが0人になったら、ゲームを終了する。それ以外の場合は()にもどる。

以上のルールでゲームを始め、そのゲームのやりとりは以下のようであった。ただし、最初にハルちゃんがいたチームをAチーム、他方をBチームとする。また、6人の中に同じ名前の子はいないものとする。

「ナッチャンがほしい」

「アキちゃんがほしい」

ジャンケンポン！

(負けた子移動) ... 1回戦終了

「ハルちゃんがほしい」

「ナッチャンがほしい」

ジャンケンポン！

(負けた子移動) ... 2回戦終了

「アキちゃんがほしい」

「ハルちゃんがほしい」

ジャンケンポン！

(負けた子移動) ... 3回戦終了

「ナッチャンがほしい」

「ハルちゃんがほしい」

ジャンケンポン！ハルちゃんの勝ち！

(ナッチャン移動) ... 4回戦終了

次の各問いに答えなさい。

- (1) 4回戦が終了したとき、ハルちゃんは A,B のどちらのチームにいるか答えなさい。
- (2) 4回戦が終了したとき、Aチームにいる子の人数を答えなさい。
- (3) 5回戦から、勝敗を記録に残すことにした。

例えば、7回戦までじゃんけんをしたとき「5回戦Aチームの勝ち、6回戦Aチームの勝ち、7回戦Bチームの勝ち」の場合、「A A B」と表すことにした。

次の場合、A、Bの並び方は何通りあるか求めなさい。

11回戦が終了したとき、Bチームが0人となる場合

14回戦が終了したとき、Bチームが0人となる場合

さて、ゲームのルールはわかりましたか。そうです、「はないちもんめ」です。様々なローカルルールもあるようです。「私の知っているはないちもんめはちょっと違う」という人もいるかも知れませんが、今回はこのルールでゲームを進めます。早速問題を解いてみましょう。

これから図なども使いながら解説をしますが、その際には簡単にするために、登場する3人ハルちゃん、ナツちゃん、アキちゃんをそれぞれ⑧、⑨、⑩で表すことにします。また名前が出てきていない3人は○で表すことにします。

さて、注目したいのは「じゃんけんした2人は同じチームになる」ということです。

1回戦はナツちゃんとアキちゃんが対戦しています。1回戦終了時までの情報では状況が全くわかりません。しかし、2回戦の対戦を見ると分かることがあります。2回戦ではハルちゃんとナツちゃんが対戦しています。ということは、ハルちゃんはAチームでしたから、ナツちゃんは1回戦終了時にはBチームにいたことがわかります。さらに1回戦でナツちゃんと対戦したアキちゃんも1回戦終了時にはBチームにいたことがわかります。ナツちゃん、アキちゃんのどちらが勝ったのかはわかりませんが、2人とも1回戦終了時はBチームにいることがわかりました。したがって1回戦終了時のチーム編成は、

Aチーム : Bチーム
⑧ ○ ⑨ ⑩ ○ ○

となります。

2回戦はハルちゃん、ナツちゃんの対戦ですが、どちらが勝ったか分かりますか？3回戦を見てみましょう。アキちゃんとハルちゃんが対戦しています。もし、2回戦でナツちゃんが勝ったとしたら3人は同じチームとなってしまう、3回戦でこの対戦は実現しません。したがって、2回戦ではハルちゃんが勝ったことが分かります。2回戦終了時のチーム編成は、

Aチーム : Bチーム
 (ハ)(ナ)○ (ア)○○○

同様に考えると、3回戦はアキちゃんが勝って、3回戦終了時のチーム編成は

Aチーム : Bチーム
 (ナ)○ (ハ)(ア)○○○

そして、4回戦はハルちゃんが勝ちましたから、4回戦終了時のチーム編成は

Aチーム : Bチーム
 ○ (ハ)(ナ)(ア)○○○

さあ、これで(1)(2)が解けました。

【解答】(1) Bチーム (2) 1人

つづいて(3)です。ここからAチームが大逆転します。

まず(3)に関係なくBチームが最短で0人になる場合はどんなときでしょうか。もちろんBチームが5連敗、すなわちAチームが5連勝したときです。Bチームが1回勝ったら、逆にもう1回負けないと0人にはなりません。Bチームが2回勝ったら、さらにもう1回負けないと0人にはなりません。もうわかりましたね。Bチームが0人になるのはBチームの負け数と勝ち数の間に、

$$(\text{負け数}) - (\text{勝ち数}) = 5 \quad \dots\dots (*)$$

という関係が成り立ちます。

それを踏まえて(3)です。5回戦から11回戦まで7回対戦します。したがって、Bチームの1勝6敗となればよいわけです。

第5回戦は必ずBチームの負けとなります。なぜならAチームが負けてしまったらAチームは0人となってゲームが続けられないからです。また、11回戦がBチームの負けとなることは明らかですが、10回戦もBチームの負けとなることがわかりますか？なぜなら、もし10回戦でBチームが勝ったとしたらその段階でBチームに所属する人数は2人以上となります。そのとき11回戦でBチームが0人になることはありません。以上の理由から、11回戦はもちろんのこと10回戦もBチームの負けとなります。

したがって、Bチームの1勝は6回戦から9回戦のいずれかであることがわかり、逆にこのとき条件を満たすことがわかります。したがって

【解答】(3) 4通り

残るは だけですが、先ほどの式(＊)に注目してください。この式から対戦回数が奇数でないとBチームが0人にならないことがわかると思います。は5回戦から14回戦の10回の対戦ですから、このときBチームが0人となることはないのです。したがって、
【解答】(3) 0通り

以上で解答と解説は終わります。

この問題を思いついたのはもちろん子供たちの遊びからです。私からは見えない隣の部屋で娘たちが従姉妹たちと「はないちもんめ」を始めました。「 ちゃんがほしい」「 ちゃんがほしい」という楽しそうな声きいているうちに、見えない向こうを声だけで再現できないかと考えたのがきっかけでした。遊びの中にも数学の題材はたくさんあります。「まさか」というようなものが数学の題材になったりします。そのような目で見てみると数学ももっと身近に感じることもできるかもしれません。