

平成20年度 入試問題の解答と解説 (数学)

平成20年2月10日に行われた入学試験の問題のうち、問5について解答と解説を行います。

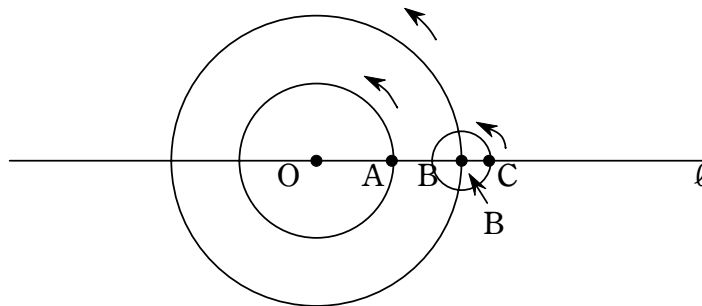
問5 直線 l 上に点 O, A, B, C が並んでいる。 O は定点で、その他の点は次の条件で一斉に動き始めるものとする。

点Aは、点Oを中心とした、半径OAの円周上を左周りに、1周48秒の速度で動く。

点Bは、点Oを中心とした、半径OBの円周上を左周りに、1周84秒の速度で動く。

点Cは、点Bを中心とした、半径BCの円周上を左周りに、1秒に $\left(\frac{45}{2}\right)^\circ$ ずつ回転する。

すなわち、点Cは16秒ごとにBの周りを1周し、そのとき直線BCと l は平行になる。(BCと l が一致する場合も含む)。



次の各問いに答えなさい。

- (1) 動き始めてから5秒後の $\angle AOB$ を求めなさい。
- (2) 初めて3点O, A, Bが一直線上に並ぶのは、動き始めてから何秒後のことか求めなさい。ただし、3点がこの順番に並んでいるとは限らない。
- (3) 始めてから初めて4点O, A, B, Cが一直線上に並ぶのは、動き始めてから何秒後のことか。ただし、4点がこの順番に並んでいるとは限らない。

「点Aは 360° まわるのに48秒かかるのだから・・・」
それでは考えてみましょう。

- (1) 点Aは1周48秒かかるのだから1秒あたり $\frac{360^\circ}{48} = \left(\frac{15}{2}\right)^\circ$ 回転します。点Bは1周84秒かかるのだから1秒あたり $\frac{360^\circ}{84} = \left(\frac{30}{7}\right)^\circ$ 回転します。したがって、点Aの方が早く回転し、1秒

ごとに $\left(\frac{15}{2}\right)^\circ - \left(\frac{30}{7}\right)^\circ = \left(\frac{45}{14}\right)^\circ$ の差がつくことになります。点Aが点Bに追いつくまでは、これに時間をかければその差を求めることが出来ます。5秒後はまだ点Aは点Bに追いついていません。したがって、これを5倍すれば答えになります。答えは、

$$\left(\frac{45}{14}\right)^\circ \times 5 = \left(\frac{225}{14}\right)^\circ$$

です。

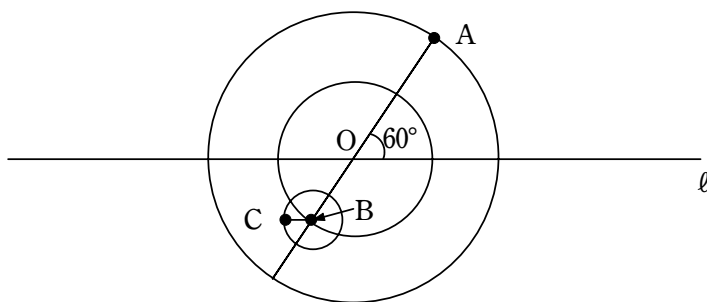
- (2) 問題を言い換えましょう。「初めて3点O, A, B が一直線上に並ぶ」というのは「初めて $\angle AOB = 180^\circ$ になる」ことです。このことが分かれば、あとは(1)の答えを利用して答えを求めることが出来ます。(1)で見たように1秒ごと $\left(\frac{45}{14}\right)^\circ$ の差がつかます。「x秒後に $\angle AOB = 180^\circ$ になる」ということを式で表せば、

$$\left(\frac{45}{14}\right)^\circ \times x = 180^\circ$$

となります。この方程式を解けばよいのです。答えは、**56秒後**です。

さて、(2)はそれぞれの点の位置が分からなくても計算だけで答えを求めることができました。が、このときのそれぞれの点の位置を確認しておきましょう。

点Aは1周と8秒分回転しています。したがって、点Aは元の位置より $\left(\frac{15}{2}\right)^\circ \times 8 = 60^\circ$ 回転していることとなります。点Bは点Oをはさんで点Aの反対側にあるのだから 240° 回転した位置というのは分かっていますが、計算で確認しておきましょう。 $\left(\frac{30}{7}\right)^\circ \times 56 = 240^\circ$ となり、確認できました。では、Cはどうでしょう。3周と8秒分回転していますから、元の位置から $\left(\frac{45}{2}\right)^\circ \times 8 = 180^\circ$ 回転した位置にあります。図に表すと次のようになります。



- (3) (2)より、「56秒ごとに3点O, A, B は一直線上に並ぶ」ことが分かりました。4点O, A, B, C が一直線上に並ぶためには3点O, A, B が一直線上に並ぶ必要があります。したがって、4点O, A, B, C が一直線上に並ぶチャンスは「56秒ごとに訪れる」のです。あとは、点Cの位置です。上の図を見て下さい。最初の56秒後には左から点C, 点Bの順に並んでいて直線BCは直線lに平行です。次の56秒後にはどうでしょう。自分で図を書いて

確認してください。左から点B, 点Cの順に並んでいて直線BCは直線 l に平行になりましたね。気が付いたと思いますが, 「3点O, A, Bが一直線上に並ぶとき, 直線BCは直線 l に平行」なのです。したがって, 「4点O, A, B, Cが一直線上に並ぶのは4点すべてが直線 l 上にあるときだけ」です。56秒ごとに点A, Bの位置を確認すると, 3回目の56秒後のとき直線 l 上にくることが分かります。したがって, 4点O, A, B, Cが一直線上に並ぶのは $56 \times 3 = 168$ より **168秒後** になります。

最後に . . .

みなさん, いかがでしたか。この問題は少し専門的な言葉を使うと「角速度」の問題です。実はこの問題, 遊園地で娘が乗ったある乗り物を見て思いつきました。私達の生活の中には数学の問題の材料になるものがたくさんあるのです。みなさんもそういったものを材料に問題を作ったり, 解いたりしてみてもはいかがでしょうか。